Рационал функцияларды интегралдау.

$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ түріндегі өрнекті n–дәрежелі көпмүшелік деп атайды. Мұндағы $a_0, a_1, a_2,...,a_n$ - нақты сандар ($a_n \neq 0$, n>0). Көпмүшеліктердің қатынасы түрінде берілген өрнек рационал өрнек болады.

Мысалы $\frac{3x-1}{x^2+1}$, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшектер рационал өрнектер.

Егер бөлшектің алымындағы көпмүшеліктің дәрежесі бөліміндегі көпмүшелік дәрежесінен кем болса, бөлшек дұрыс деп, ал кем болмаса бөлшек бұрыс деп аталады. Мысалдағы бірінші бөлшек - дұрыс, ал екінші – бұрыс бөлшек.

Кез келген бұрыс бөлшекті алымын бөлімге бөлу арқылы дұрыс бөлшекке келтіріп алуға болады.

Мысалы, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}$ бөлшекті дұрыс бөлшекке келтірейік:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-5x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-4x-4 \\
-4x^2+1 & \\
\underline{-4x^2+4x} & \\
\quad -4x+1 & \\
\quad \underline{-4x+4} & \\
\qquad -3 &
\end{array}$$

Сонымен, берілген бөлшектің бүтін бөлігін бөліп дұрыс бөлшекке келтірдік:

$$\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}=x^2-4x-4-\frac{3}{x-1}.$$

Мектеп курсынан көпмүшеліктің мынадай қасиеті белгілі: Кез келген көпмүшелікті $(x-a)^\alpha$ және $(x^2+px+q)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктеуге болады.

Мынадай тұжырым дұрыс болады: ***Егер дұрыс рационал бөлшек бөлімі*** $(x-a)^\alpha$ ***және*** $(x^2+px+q)^\beta$ ***түріндегі көбейткіштерге жіктелген болса, онда бөлшектімынадай қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеуге болады:***

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha(x^2+px+q)^\beta}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_\beta x+C_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}, \qquad (2)$$

мұндағы *P(x)* – белгілі көпмүшелік, $A_1, A_2,...,A_\alpha$, $B_1, B_2,...,B_\beta$, $C_1, C_2,...,C_\beta$ - белгісіз коэффициенттер. Ол коэффициенттерді табу үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланамыз: теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз; екі бөлшектің бөлімдері тең болатындықтан, алымдарын теңестіреміз; теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз; осы жүйені шешіп белгісіз коэффициенттерді табамыз.

Мысалы $\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектер қосындысына жіктейік.

Бөлшек дұрыс, сондықтан (2) формула бойынша бөлшекті жіктейміз,

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Белгісіз коэффициенттерді табу үшін теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіріп жазайық:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A_1(x+1)(x^2-x+1)+A_2(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$$

Бөлімдері бірдей, алымдарын теңестіреміз (оң жақтағы бөлшек алымын ықшамдап, х-тің дәрежесі түрінде жазайық):

$$3x^2+2x+1=(A_1+B)x^3+(A_2+2B+C)x^2+(-A_2+B+2C)x+A_1+A_2+C.$$

Теңдіктің екі жағындағы x айнымалының бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіру арқылы теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}A_1+B=0\\A_2+2B+C=3\\-A_2+B+2C=2\\A_1+A_2+C=1\end{cases}$$

Төрт белгісізді, төрт теңдеуден тұрған жүйені шешіп, белгісіз коэффициенттерді табамыз:

$$A_1=-\frac{2}{3};\quad A_2=\frac{2}{3};\quad B=\frac{2}{3};\quad C=1.$$

Табылған мәндерді теңдіктегі орнына қойып, бөлшектің қарапайым жіктелуін аламыз:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x+1)^2}+\frac{2x+3}{3(x^2-x+1)}.$$

Енді осы рационал бөлшекті интегралдайық.

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx=\int\left(-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{2}{3(x+1)^2}+\frac{2x+3}{3(x^2-x+1)}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx$$

Әр интегралды жеке қарастырайық.

1) $\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C$, мұнда бөлшектің алымы бөлімінің туындысы болғандықтан 7-қасиетті пайдаландық.

2) $$\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\left\|\begin{matrix}x+1=t\\dx=dt\end{matrix}\right\|=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x+1}+C;$$

3) $\int \frac{2x+3}{x^2-x+1}dx = \int \frac{(2x-1)+4}{x^2-x+1}dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{4dx}{x^2-x+1} =$

$$= \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{4d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \ln\left|x^2-x+1\right| + 4$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{8}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,$$

мұнда бірінші қосылғышты алымы бөлімінің туындысы болғандай етіп түрлендірдік те 7-қасиетті пайдаландық. Ал екінші қосылғышта бөлімінің толық квадратын бөліп алып, интегралдар кестесіндегі 14-формуланы пайдаландық.

Сонымен,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx = -\frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{2}{3(x+1)} +$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{8}{3\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдау.

1. $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Мұндағы иррационалдықты $t = \sqrt[n]{x}$ деген белгілеу енгізіп, рационал функцияға келтіруге болады.

Мысал.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \left\| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\| = \int \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(t - arctgt)+C = 2(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x})+C.$$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Қарапайым жағдайларда мұндай интеграл кестелі интегралға келтіріледі. Ол үшін квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып, айнымалыны алмастыру керек.

Мысал.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \left\| \begin{array}{l} 5+2x-x^2 = 6-(x-1)^2 \\ x-1 = t \Rightarrow x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right\| = \int \frac{(t+1)dt}{\sqrt{6-t^2}} =$$

$$=\int\frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}+\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=\left\|\begin{matrix}6-t^2=z\\-2tdt=dz\\tdt=-\frac{1}{2}dz\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}+\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-\sqrt{z}+arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C=-\sqrt{6-t^2}+$$

$$+arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C=-\sqrt{5+2x-x^2}+arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

3. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралды $t=tg\frac{x}{2}$ ($-\pi<x<\pi$) - универсал алмастыру жасау арқылы рационал функцияны интегралдауға келтіреді. Шынында да,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow x=2arctgt\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Мысал. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

4. $\int\sin^m x\cos^n xdx$ түріндегі интегралды қарастырайық. Бұл интегралда екі жағыдай болуы мүмкін:

а) *m* немесе *n* сандарының біреуі тақ оң сан. Егер ***m*** –тақ сан болса ***cosx=t*** деген, ал егер ***n***-тақ сан болса, ***sinx=t*** деген алмастыру жасалады.

б) *m* және *n* сандары жұп оң сан. Онда мынадай формулаларды пайдаланады:

$$sinxcosx=\frac{1}{2}sin2x;$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$